

Dimension d'un espace vectoriel

Plan du chapitre

1	Préliminaires	1
1.1	Espace de dimension finie	1
1.2	Théorèmes de la base incomplète, de la base extraite	2
1.3	Théorème de la dimension pour les e.v.	2
2	Dimension d'un e.v.	3
2.1	Définition et exemples	3
2.2	Exemple important : dimension et base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$	4
2.3	Dimension de $E \times F$	6
2.4	Famille libre, famille génératrice et dimension.	6
3	Dimension et s.e.v.	7
3.1	Dimension d'un s.e.v.	7
3.2	Base adaptée à une décomposition	8
3.3	Dimension et somme de s.e.v.	9
3.4	Dimension et s.e.v. supplémentaires	10
4	Compléments : dimension infinie	12

Hypothèse

Dans tout ce chapitre, \mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} .
 E désigne un \mathbb{K} -espace vectoriel.

1 Préliminaires

1.1 Espace de dimension finie

Définition 26.1 (Cardinal d'une famille)

Soit $\mathcal{F} = (a_i)_{i \in I}$ une famille indexée par un ensemble I .

- Si I est **fini**, on dit que la famille $(a_i)_{i \in I}$ est **finie**. De plus, on appelle cardinal (ou taille) de la famille le nombre d'éléments de I , et on note ce nombre

$$\text{card}(\mathcal{F}) = \text{card}((a_i)_{i \in I})$$

- Si I est infini, on dit que la famille $(a_i)_{i \in I}$ est **infinie**.

Attention : le cardinal de $(a_i)_{i \in I}$ ne dépend pas des valeurs prises par a_i . Même s'ils sont tous égaux, chacun compte pour un élément de plus pour le cardinal.

Exemple 1. Le cardinal de la famille $(0, 0, 0)$ est ...

Exemple 2. Le cardinal de $(X^k)_{0 \leq k \leq n}$ est ...

Exemple 3. La famille $(x \mapsto x^\alpha)_{\alpha \in \mathbb{Z}}$ est infinie.

Définition 26.2 (Dimension finie)

E est dit de dimension finie si E possède une famille génératrice finie.
Sinon, on dit que E est de dimension infinie.

Être de dimension finie revient à dire qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \dots, x_n \in E$ tels que $E = \text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$. Attention, le n en question ne sera pas forcément la dimension de E (cf section suivante pour la définition précise).

1.2 Théorèmes de la base incomplète, de la base extraite

Les deux théorèmes suivants sont admis : leur preuve est faisable si E est de dimension finie, mais en dimension infinie, cela nécessite l'axiome du choix.

Théorème 26.3 (Théorème de la base incomplète (admis))

Toute famille libre de E peut être complétée en une base de E .

En d'autres termes, si \mathcal{L} est une famille libre, on peut trouver une sur-famille \mathcal{F} (i.e. $\mathcal{L} \subset \mathcal{B}$) telle que \mathcal{B} soit une base de E .

Théorème 26.4 (Théorème de la base extraite (admis))

De toute famille génératrice de E , on peut extraire une base de E .

En d'autres termes, si \mathcal{G} est une famille génératrice, on peut trouver une sous-famille $\mathcal{B} \subset \mathcal{G}$ telle que \mathcal{B} soit une base de E .

1.3 Théorème de la dimension pour les e.v.

Théorème 26.5 (Théorème de la dimension pour les e.v.)

On suppose que E est de dimension finie. Le cardinal de toute famille libre est plus petit que le cardinal de toute famille génératrice. Autrement dit, si \mathcal{G} est une famille génératrice de E et que \mathcal{L} est une famille (de E) libre, alors :

$$\text{card}(\mathcal{L}) \leq \text{card}(\mathcal{G})$$

De manière équivalente, si \mathcal{F} est une famille finie de E telle que $\text{card}(\mathcal{F}) > \text{card}(\mathcal{G})$, alors \mathcal{F} ne peut pas être libre : \mathcal{F} est donc liée. C'est en fait cette version qu'on va prouver.

Démonstration. Soit $\mathcal{G} = (g_1, \dots, g_m)$ une famille génératrice de E de cardinal $m \in \mathbb{N}^*$. Supposons par l'absurde qu'il existe une famille libre (x_1, \dots, x_n) de cardinal $n > m$. Comme toute sous-famille d'une famille libre est encore libre, la famille $\mathcal{X} := (x_1, \dots, x_{m+1})$ est également libre.

Comme \mathcal{G} est génératrice, il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{K}$ tels que

$$x_1 = \alpha_1 g_1 + \dots + \alpha_m g_m$$

Si tous les coefficients $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ étaient nuls, on aurait $x_1 = 0$, ce qui contredirait le fait que \mathcal{X} soit libre. Donc $(\alpha_1, \dots, \alpha_m) \neq 0$, et quitte à changer l'ordre de \mathcal{G} , on peut supposer que $\alpha_1 \neq 0$. Alors

$$g_1 = \frac{1}{\alpha_1} x_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} g_2 - \dots - \frac{\alpha_m}{\alpha_1} g_m$$

Avec cette relation, toute combinaison linéaire de g_1, \dots, g_m peut se réécrire comme une combinaison linéaire de $x_1, g_2, g_3, \dots, g_m$. Ainsi :

$$E = \text{Vect}(g_1, g_2, \dots, g_m) = \text{Vect}(x_1, g_2, \dots, g_m)$$

Procédons par récurrence pour montrer que pour tout $k \in \llbracket 1, m \rrbracket$:

$$E = \text{Vect}(x_1, \dots, x_k, g_{k+1}, \dots, g_m)$$

Cette assertion est vraie pour $k = 1$ par ce qui précède. Supposons que cette assertion soit vraie pour un $k \in \llbracket 1, m - 1 \rrbracket$, et montrons qu'elle l'est encore au rang $k + 1$. Par hypothèse de récurrence, la famille $x_1, \dots, x_k, g_{k+1}, \dots, g_m$ est génératrice, donc il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{K}$ tels que

$$x_{k+1} = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_k x_k + \alpha_{k+1} g_{k+1} + \dots + \alpha_m g_m$$

Si $\alpha_{k+1} = \dots = \alpha_m = 0$, on aurait

$$x_{k+1} = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_k x_k$$

et donc x_{k+1} serait une combinaison linéaire de x_1, \dots, x_k , d'où \mathcal{X} serait liée, ce qui est impossible par hypothèse. Donc $(\alpha_{k+1}, \dots, \alpha_m) \neq 0$ et quitte à changer l'ordre de \mathcal{G} , on peut supposer $\alpha_{k+1} \neq 0$. Alors,

$$\alpha_{k+1} g_{k+1} = -\alpha_1 x_1 - \dots - \alpha_k x_k + x_{k+1} - \alpha_{k+2} g_{k+2} - \dots - \alpha_m g_m$$

et en divisant par α_{k+1} , on trouve que g_{k+1} est une combinaison linéaire de $x_1, \dots, x_{k+1}, g_{k+2}, \dots, g_m$. Avec un argument similaire à ce qui précède, on a donc

$$\begin{aligned} E &= \text{Vect}(x_1, \dots, x_k, g_{k+1}, g_{k+2}, \dots, g_m) \\ &= \text{Vect}(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, g_{k+2}, \dots, g_m) \end{aligned}$$

Ainsi, la propriété est vérifiée pour tout $k \in \llbracket 1, m \rrbracket$. En particulier, pour $k = m$, on obtient

$$E = \text{Vect}(x_1, \dots, x_m)$$

Comme x_{m+1} est un vecteur de E , on en déduit que $x_{m+1} \in \text{Vect}(x_1, \dots, x_m)$, donc que la famille $\mathcal{X} = (x_1, \dots, x_{m+1})$ est liée. Contradiction. D'où le résultat. □

2 Dimension d'un e.v.

2.1 Définition et exemples

Théorème 26.6

Tout e.v. (de dimension finie ou non) possède des bases.

Si E est un e.v. de dimension finie, toutes ses bases ont le même cardinal : cet entier (positif) est appelé la dimension de E , et est noté $\dim E$.

Remarque. On a le droit d'écrire "dim E " uniquement si E est de dimension finie. Aucune formule où apparaît "dim E " (ou "dim F " ou "dim G ") n'est valable si une de ces dimension est infinie.

Démonstration. La première assertion résulte du théorème de la base incomplète : il suffit de prendre une famille libre quelconque de l'e.v. (par exemple une famille réduite à un vecteur non nul) et de la compléter en une base. Cette preuve ne marche pas lorsque l'e.v. est $\{0_E\}$, mais ce cas est réglé par une convention (cf plus bas).

Montrons la deuxième assertion. Soit

$$\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n) \quad \mathcal{B}' = (f_1, \dots, f_p)$$

deux bases de E . Comme \mathcal{B} est libre et \mathcal{B}' est génératrice, par le théorème 26.5, on a

$$n = \text{card}(\mathcal{B}) \leq \text{card}(\mathcal{B}') = p$$

et de même $p \leq n$ en utilisant que \mathcal{B}' est libre et \mathcal{B} est génératrice. Ainsi $p = n$. Toutes les bases de E ont donc le même cardinal. La dimension de E est donc une notion bien définie. □

Exemple 4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'e.v. \mathbb{K}^n admet pour base (canonique)

$$\mathcal{B} = \left((1, 0, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), (0, 0, \dots, 0, 1) \right)$$

Ainsi, \mathbb{K}^n est de dimension finie et $\dim \mathbb{K}^n = n$.

Exemple 5. $\mathbb{K}_n[X]$ admet pour base (canonique) la famille $(1, X, \dots, X^n)$, donc $\mathbb{K}_n[X]$ est de dimension finie et

$$\dim \mathbb{K}_n[X] =$$

Exemple 6. Si \mathbb{C} est vu comme un \mathbb{R} -e.v., on a vu que $(1, i)$ est une base de \mathbb{C} , donc $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$. (Cette notation précise que c'est la dimension de \mathbb{C} en tant que \mathbb{R} -e.v. : c'est nécessaire car $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$)

Remarque. Par convention, la famille vide $()$ est libre et comme $\text{Vect}(\emptyset) = \{0_E\}$, elle constitue une base de $\{0_E\}$. Ainsi, $\{0_E\}$ est de dimension finie et $\dim\{0_E\} = 0$. C'est le seul s.e.v. de E à être de dimension nulle.

Exemple 7. Pour tout $u \in E$, le s.e.v. $\mathbb{K}u := \text{Vect}(u)$ est de dimension finie et $\dim(\mathbb{K}u) = \begin{cases} 1 & \text{si } u \neq 0 \\ 0 & \text{si } u = 0 \end{cases}$

Exemple 8. Pour tous $u, v \in E$ **non colinéaires**, le s.e.v. $\text{Vect}(u, v)$ est de dimension finie égale à 2.

Définition 26.7

Un e.v. de dimension 1 est appelé une droite vectorielle (il peut s'écrire $\mathbb{K}u$ avec $u \neq 0$).
Un e.v. de dimension 2 est appelé un plan vectoriel.

2.2 Exemple important : dimension et base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Rappel : pour tous $i, j \in \mathbb{N}$, on définit le symbole de Kronecker par

$$\delta_{i,j} := \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Rappel : soit $n, p \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket$, on définit la matrice élémentaire d'indice (i, j) par :

$$E_{i,j} := \begin{pmatrix} \mathbf{0} & & & & 0 & & & & \mathbf{0} \\ & & & & \vdots & & & & \\ & & & & \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & & & & \vdots & & & & \\ \mathbf{0} & & & & 0 & & & & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{ligne } i \\ \\ \\ \text{colonne } j \end{array}$$

Exemple 9. Dans $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{K})$, il y a 6 matrices élémentaires :

$$E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{1,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{2,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Propriété 26.8

Toute matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire des matrices élémentaires :

$$A = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} a_{ij} E_{i,j}$$

Démonstration. Immédiat. □

Corollaire 26.9

Dans l'e.v. $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, la famille des matrices élémentaires $(E_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ forme une base de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

En particulier, $\dim \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) = np$ et $\dim \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = n^2$.

Démonstration. Par la Propriété 26.8, la famille $(E_{i,j})$ est génératrice. Montrons qu'elle est libre. Soit $(\lambda_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ une famille de scalaires.

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \lambda_{i,j} E_{i,j} = 0_{n,p} &\implies \begin{pmatrix} \lambda_{1,1} & \dots & \lambda_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_{n,1} & \dots & \lambda_{n,p} \end{pmatrix} = 0_{n,p} \\ &\implies \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket \quad \lambda_{i,j} = 0 \end{aligned}$$

Donc la famille $(E_{i,j})$ est une base. D'où le résultat. □

2.3 Dimension de $E \times F$

Propriété 26.10

Si E, F sont de dimension finie, alors $E \times F$ aussi et

$$\dim(E \times F) = \dim E + \dim F$$

En particulier, $\dim(E_1 \times \cdots \times E_p) = \sum_{i=1}^p \dim E_i$.

La preuve s'appuie sur le fait que si (e_1, \dots, e_n) est une base de E et si (f_1, \dots, f_p) est une base de F , alors la famille

$$\begin{array}{ccccccc} (e_1, 0) & (e_2, 0) & \cdots & (e_n, 0) & & & \\ (0, f_1) & (0, f_2) & \cdots & (0, f_p) & & & \end{array}$$

est une base de $E \times F$ (la preuve est simple et laissée en exercice).

2.4 Famille libre, famille génératrice et dimension

Théorème 26.11 (VIT – Very Important Theorem !)

On suppose que E est de dimension finie n . Alors :

1. Toute famille libre a au plus n éléments.
2. Toute famille libre avec n éléments est une base.
3. Toute famille génératrice a au moins n éléments.
4. Toute famille génératrice avec n éléments est une base.

Démonstration.

□

Exemple 10. Montrer que

$$\mathcal{F} = \left((1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1) \right)$$

est une base de \mathbb{R}^3 .

Exemple 11. Soit $\alpha \in \mathbb{K}$. Montrer que la famille

$$\mathcal{F} = \left((X - \alpha)^k \right)_{0 \leq k \leq n}$$

est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

3 Dimension et s.e.v.

3.1 Dimension d'un s.e.v.

Théorème 26.12

On suppose E de dimension finie. Alors tout s.e.v. F de E est de dimension finie et

$$\dim F \leq \dim E$$

De plus, si $\dim F = \dim E$, alors $F = E$.

Démonstration. On suppose que $\dim E = n \in \mathbb{N}$. Soit \mathcal{B}_F une base de F . En particulier, \mathcal{B}_F est une famille libre (sur F comme sur E , le caractère libre ne dépend pas de l'e.v. qu'on considère). Comme c'est une famille libre dans E de dimension finie, par le théorème 26.11,

$$\dim F = \text{card}(\mathcal{B}_F) \leq n = \dim E$$

Supposons maintenant que $\dim F = \dim E = n$. La famille \mathcal{B}_F étant libre et ayant $\dim F = n$ éléments, c'est en particulier une base de E par le théorème 26.11. En particulier, \mathcal{B}_F engendre E . Ainsi, $E = \text{Vect}(\mathcal{B}_F) = F$. \square

Méthode

Pour montrer que deux e.v. F et G de dimension finie sont égaux, il suffit de montrer une inclusion et l'égalité des dimensions :

$$\left\{ \begin{array}{l} F \subset G \\ \dim F = \dim G \end{array} \right. \implies F = G$$

En particulier, cela marche aussi lorsque F et G sont deux s.e.v. (de dimension finie) d'un e.v. E .

Exemple 12. Montrer que dans \mathbb{R}^3 , les s.e.v. suivants sont égaux :

$$F = \text{Vect}((1, 2, -3), (-3, 2, 1)) \quad G = \{(x, y, z) \mid x + y + z = 0\}$$

3.2 Base adaptée à une décomposition

Définition 26.13 (Base adaptée à une décomposition en sous-espaces supplémentaires)

Soit F, G deux s.e.v. supplémentaires de E , c'à-d tels que $F \oplus G = E$. On dit qu'une base \mathcal{B} de E est adaptée à la décomposition $E = F \oplus G$ si tout vecteur de \mathcal{B} est un élément de F ou de G .

Exemple 13. \mathbb{R} et $i\mathbb{R}$ sont des s.e.v. supplémentaires de \mathbb{C} . La base $(1, i)$ est adaptée à la décomposition $\mathbb{C} = \mathbb{R} \oplus i\mathbb{R}$ car $1 \in \mathbb{R}$ et $i \in i\mathbb{R}$. De même pour la base $(i, -1)$. En revanche, $(1, j)$ est une base de \mathbb{C} qui n'est pas adaptée à cette décomposition car $j \notin \mathbb{R}$ et $j \notin i\mathbb{R}$.

Dans la définition ci-dessus, tout vecteur de \mathcal{B} est ou bien dans F , ou bien dans G : supposons par l'absurde qu'un vecteur u dans \mathcal{B} vérifie $u \in F \cap G$. Alors $u \in \{0_E\}$ car $F \cap G = \{0_E\}$. D'où $u = 0_E$. Ainsi, \mathcal{B} contient le vecteur nul 0_E , ce qui en fait une famille liée. Ce n'est donc pas une famille libre, donc pas une base. Contradiction.

Propriété 26.14

On suppose que E est de dimension finie n .

1. Si F, G sont deux s.e.v. **supplémentaires** de bases respectives (f_1, \dots, f_p) et (g_1, \dots, g_q) , alors

$$\mathcal{B} := (f_1, \dots, f_p, g_1, \dots, g_q)$$

est une base de E qui est adaptée à la décomposition $E = F \oplus G$.

2. Réciproquement, soit (e_1, \dots, e_n) une base de E . Alors pour tout $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$, les s.e.v.

$$V := \text{Vect}(e_1, \dots, e_p) \quad \text{et} \quad V' := \text{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_n)$$

sont supplémentaires : $E = V \oplus V'$.

De plus, la base (e_1, \dots, e_n) est adaptée à la décomposition $E = V \oplus V'$.

Autrement dit, lorsqu'on dispose de deux s.e.v. supplémentaires dans E , on peut concaténer leurs bases pour former une base de E . Il est essentiel pour cela que les s.e.v. F, G soient supplémentaires.

Remarque temporaire (À ignorer une fois que le Théorème 26.18 sera vu) Le premier point de la Proposition 26.14 a une autre conséquence. \mathcal{B} étant une base de E , on a $\text{card}(\mathcal{B}) = \dim E$. Ainsi,

$$E = F \oplus G \implies \dim E = \text{card}(\mathcal{B}) = p + q \implies \dim E = \dim F + \dim G$$

Corollaire 26.15 (Existence d'un supplémentaire)

Tout s.e.v. de E admet (au moins) un supplémentaire dans E .

Démonstration. La preuve n'est exigible que pour lorsque E est de dimension finie. On pose $n = \dim E \in \mathbb{N}$. Soit V un s.e.v. de E . On considère (f_1, \dots, f_p) une base de V . Par le théorème de la base incomplète, on peut compléter (f_1, \dots, f_p) en une base de E :

$$\mathcal{B} = (f_1, \dots, f_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$$

Alors, par la Proposition 26.14, l'ensemble $V' := \text{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_n)$ est un supplémentaire de V dans E . □

3.3 Dimension et somme de s.e.v.

Propriété 26.16

On suppose E de dimension finie. Si F, G sont des s.e.v. de E en somme directe, alors $(F + G)$ est de dimension finie et)

$$\dim(F \oplus G) = \dim F + \dim G$$

Remarque. Ce résultat est faux si la somme n'est pas directe.

Par exemple, si $\dim F > 0$, on a $\dim \underbrace{(F + F)}_{=F} = \dim F \neq \dim F + \dim F$.

Démonstration. Comme $F + G \subset E$, l'ensemble $F + G$ est clairement de dimension finie. On considère l'e.v. $\mathcal{E} := F + G$. On a clairement $F + G = \mathcal{E}$ et comme F, G sont en somme directe, on a $F \cap G = \{0\}$. Ainsi, F, G sont supplémentaires dans \mathcal{E} , c'ad $\mathcal{E} = F \oplus G$. Alors, par la Remarque temporaire plus haut, on en déduit que

$$\dim \mathcal{E} = \dim F + \dim G$$

d'où le résultat puisque $\mathcal{E} = F \oplus G$. □

Propriété 26.17 (Formule de Grassman)

On suppose E de dimension finie. Si F, G sont des s.e.v. de E alors $F + G$ est de dimension finie et

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$$

Par exemple, si F, G sont deux plans non confondus de \mathbb{R}^3 , on peut vérifier que $F + G = \mathbb{R}^3$ et que leur intersection $F \cap G$ est une droite. La formule donne bien alors $3 = 2 + 2 - 1$.

Démonstration. Comme $F + G \subset E$, l'ensemble $F + G$ est clairement de dimension finie. Les deux premières étapes consistent à construire un ensemble S qui sera en même temps un supplémentaire de F dans $F + G$ et un supplémentaire de $F \cap G$ dans G .

- L'ensemble $F \cap G$ est un s.e.v. de G , donc par le corollaire 26.15, $F \cap G$ admet un supplémentaire S dans G , i.e.

$$G = (F \cap G) \oplus S \quad \text{donc en particulier} \quad (F \cap G) \cap S = \{0_E\}$$

- On considère l'e.v. $\mathcal{E} := F + G$. Montrons que $\mathcal{E} = F \oplus S$.
 - Tout d'abord, montrons que $F \cap S = \{0_E\}$. Comme $S \subset G$, on a $S = G \cap S$ donc

$$F \cap S = F \cap (G \cap S) = (F \cap G) \cap S = \{0_E\}$$

- Ensuite, montrons que $F + S = \mathcal{E}$. Il suffit de montrer l'inclusion de \mathcal{E} dans $F + S$. Soit donc $x \in \mathcal{E}$. Comme $\mathcal{E} = F + G$, on peut écrire

$$x = x_F + x_G \quad \text{avec} \quad (x_F, x_G) \in F \times G$$

Or, $x_G \in G = (F \cap G) \oplus S$, donc

$$x_G = x_{F \cap G} + x_S \quad \text{avec} \quad (x_{F \cap G}, x_S) \in (F \cap G) \times S$$

On en déduit que

$$x = \underbrace{x_F + x_{F \cap G}}_{\in F} + \underbrace{x_S}_{\in S} \in F + S$$

D'où $\mathcal{E} \subset F + S$ par arbitraire sur x .

- Finalement, $\mathcal{E} = F \oplus S$.
- Ainsi, par la Proposition 26.16, on a

$$G = (F \cap G) \oplus S \implies \dim G = \dim(F \cap G) + \dim S$$

$$F + G = \mathcal{E} = F \oplus S \implies \dim(F + G) = \dim F + \dim S$$

La première ligne donne $\dim S = \dim G - \dim(F \cap G)$, si bien que la seconde entraîne :

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$$

□

Remarque. La formule de Grassman permet de retrouver la Proposition 26.16. En effet, F, G sont en somme directe si et seulement si $F \cap G = \{0\}$, c'à d si et seulement si $\dim(F \cap G) = 0$.

3.4 Dimension et s.e.v. supplémentaires

Théorème 26.18 (VIT — Caractérisations de “ F, G sont supplémentaires”)

On suppose E de dimension finie. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $F \oplus G = E$
2. $F + G = E$ et $F \cap G = \{0_E\}$
3. $F + G = E$ et $\dim F + \dim G = \dim E$
4. $F \cap G = \{0_E\}$ et $\dim F + \dim G = \dim E$

Autrement dit pour montrer que F et G sont supplémentaires, il suffit de vérifier deux assertions parmi :

- $F + G = E$
- $F \cap G = \{0\}$
- $\dim F + \dim G = \dim E$

et lorsque c'est le cas, la troisième assertion est également vérifiée.

Démonstration.

□

Remarque. Il est souvent difficile de montrer que $E = F + G$. Ainsi, pour montrer que deux s.e.v. sont supplémentaires, on montre fréquemment l'assertion 4 (mais cela ne marche qu'en dimension finie !).

En dimension infinie, on a seulement l'équivalence entre les assertions 1 et 2, comme vu au chapitre précédent.

Exemple 14. Montrer que les ensembles $A = \{(x, x, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ et $B = \{(0, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\}$ sont des s.e.v. supplémentaires de \mathbb{R}^3 .

4 Compléments : dimension infinie

Propriété 26.19

Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. E est de dimension infinie.
2. Il existe une famille $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ qui est libre.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une famille de n éléments de E qui est libre.

Exemple. $\mathbb{K}[X]$ est de dimension infinie car $(X^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une famille libre (et même une base) avec une infinité d'éléments.

Remarque. Toute famille libre infinie n'est pas nécessairement une base. Par exemple, $(X^{2^n})_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille libre infinie mais ce n'est pas une base de $\mathbb{K}[X]$.

En particulier, $F = \text{Vect}(X^{2^n})_{n \in \mathbb{N}}$ est un s.e.v. de dimension infinie de $E = \mathbb{K}[X]$ mais, bien que tous deux de dimension infinie, on a cependant $F \neq \mathbb{K}[X]$. Le théorème 26.12 est donc faux lorsque E et F sont de dimension infinie.